μηδενικο περιεχ.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV

14 Ιουνίου 2016

Θέμα 1. [1]

(α') **[0.5]** Πότε λέμε ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχει μηδενικό περιεχόμενο; ορισμό!!

→ καθε μονοσυνολο $\{x\}$?

→ $\emptyset \subset \mathbb{R}^4$

→ καθε υπερεπιπεδο

(β') **[0.5]** Δείξτε ότι το $E = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ έχει μηδενικό περιεχόμενο.

Θέμα 2. [2] Δίνεται ο κλειστός κυκλικός δίσκος $D \subset \mathbb{R}^2$ με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R > 0$.

(α') **[0.5]** Δείξτε ότι το D είναι κανονικό χωρίο ως προς τους άξονες $0x$ και $0y$.

(β') **[1]** Δείξτε ότι το D είναι συμπαγές και αιτιολογήστε γιατί το ∂D έχει μηδενικό περιεχόμενο.

(γ') **[0.5]** Υπολογίστε το εμβαδόν του D με χρήση του Θεωρήματος του Green.

Θέμα 3. [2] Έστω $V \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και τα ελλειπτικά παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = -(x^2 + y^2)$.

(α') **[0.5]** Αιτιολογήστε γιατί το V είναι κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο $0xy$.

(β') **[0.5]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_V z^2 \, d(x,y,z)$.

(γ') **[1]** Υπολογίστε τον όγκο του V με χρήση της Αρχής του Cavalieri. ???

$\gamma(t) = (t, \sin t)$

Θέμα 4. [1] Έστω C το γράφημα της $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_C y\sqrt{1-y^2}\,ds \qquad \text{και} \qquad J = \int_C (1, \sqrt{1-y^2}) \cdot d(x,y),$$

$\pi/2 \to 0$

όπου για το J θεωρούμε την C ως απλή καμπύλη με αρχικό σημείο $(\pi/2, 1)$ και τελικό $(0,0)$.

$-\gamma$

Θέμα 5. [1.5] Έστω $\bar{f}(x,y,z) = -\dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, και η καμπύλη

$$\bar{\gamma}(t) = r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t\right), \qquad t \in [0,\pi], \qquad r > 0.$$

(α') **[0.5]** Εξετάστε αν το $\bar{f}$ είναι πεδίο κλίσεων, και αν είναι, βρείτε ένα δυναμικό του.

(β') **[0.5]** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z) \cdot d(x,y,z)$.

(γ') **[0.5]** Περιγράψτε την καμπύλη $\bar{\gamma}$ γεωμετρικά ως εξής: «Η $\bar{\gamma}$ παραμετρικοποιεί το τμήμα της καμπύλης στον $\mathbb{R}^3$, η οποία προκύπτει από την τομή του επιπέδου __________ με __________, και έχει (η $\bar{\gamma}$ και το τμήμα αυτό) αρχικό σημείο το ______ και τελικό σημείο το ______.»

Θέμα 6. [2.5] Έστω η $\bar{f}(x,y,z) = (x^3, y^3, 1)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, και οι δύο επιφάνειες

$$S_1 = \{(x,y,2x^2+2y^2) : (x,y) \in D\} \qquad \text{και} \qquad S_2 = \{(x,y,1+x^2+y^2) : (x,y) \in D\}$$

με το D του Θέματος 2 για $R = 1$. $D \quad x^2+y^2=1$

(α') **[0.5]** Υπολογίστε το εμβαδόν της S_2.

(β') **[1.5]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για την $\bar{f}$ στο $V \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τις S_1 και S_2. *[Σκεφθείτε πώς μπορείτε να ελαχιστοποιήσετε τους υπολογισμούς σας!]*

(γ') **[0.5]** Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για την $\bar{f}$ στην S_2.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ιούνιος 2016

Θέμα 1º

α) Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει n-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο, $(v(A)=0)$, αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ κλειστό ορθογώνιο $Q_i \in \mathbb{R}^n$, με $i=1,\dots,k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ να είναι υπερσύνολο του A και $\sum_{i=1}^{k} v(Q_i) < \varepsilon$

β) Αρχικά θα δείξουμε ότι το E είναι ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο.

$E = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$

Το κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι Jordan μετρήσιμο ως κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις 0, 1 είναι ολοκληρώσιμες ως συνεχείς σταθερές συναρτήσεις ορισμένες επί συμπαγούς και Jordan μετρήσιμου συνόλου. Αφού E Jordan μετρήσιμο είναι και φραγμένο.

Για την κλειστότητα, έστω $x_v \in E$ με $x_v \to x \in \mathbb{R}$ άρα $x_v \in [0,1]$ με $0 \le x_v \le 1$ προκύπτει ότι και το $x \in [0,1]$ $\forall v \in \mathbb{N}$. Άρα E κλειστό. Το E ως κλειστό και φραγμένο θα είναι συμπαγές. Επίσης το E ως Jordan μετρήσιμο, η θύνη του E που συμπίπτει με το E έχει μηδενικό περιεχόμενο ($\overline{E} \equiv E$)

Θέμα 2º $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}$

α) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -R \le x \le R, \; -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$

$$\left.\begin{aligned} \text{Έστω } \varphi_1(x) &= -\sqrt{R^2-x^2} \\ \varphi_2(x) &= \sqrt{R^2-x^2} \end{aligned}\right\} \text{ολοκληρώσιμες ως συνεχείς συναρτήσεις}$$

$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ οπότε κανονικό χωρίο ως προς Ox

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -R \le y \le R, \; -\sqrt{R^2-y^2} \le x \le \sqrt{R^2-y^2}\}$

$$\left.\begin{aligned} \text{Έστω } h_1(y) &= -\sqrt{R^2-y^2} \\ h_2(y) &= \sqrt{R^2-y^2} \end{aligned}\right\} \text{ολοκληρώσιμες ως συνεχείς συναρτήσεις}$$

$h_1(y) \le h_2(y)$ οπότε κανονικό χωρίο ως προς Oy β) Αρχικά θα ελέγξουμε αν είναι Jordan μετρήσιμο.

Είναι Jordan μετρήσιμο γιατί το διάστημα $[-R,R]$ ως κλειστό ορθογώνιο και $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ή $h_1(y)$, $h_2(y)$ είναι ολοκληρώσιμες ως συνεχείς συναρτ. ορισμένες σε συμπαγές και Jordan μετρήσιμο σύνολο το $[-R,R]$.

Αφού D Jordan μετρήσιμο $\to$ D φραγμένο

Για την κλειστότητα έχω: $(x_\nu, y_\nu) \in D \ \forall \nu \in \mathbb{N}$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$x_\nu \in [-R,R]$ και $x_\nu \to x \rightsquigarrow x \in [-R,R]$ και επειδή $\varphi_1(x_\nu) \le y_\nu \le \varphi_2(x_\nu)$

με $\varphi_1(x_\nu) \to \varphi_1(x)$ $\quad y_\nu \to y$ και $\varphi_2(x_\nu) \to \varphi_2(x)$ έχουμε

$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, οπότε $(x,y) \in B(0,1)$. Άρα D κλειστό

γ) $E = \frac{1}{2} \int_D (-y,x)\, d(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

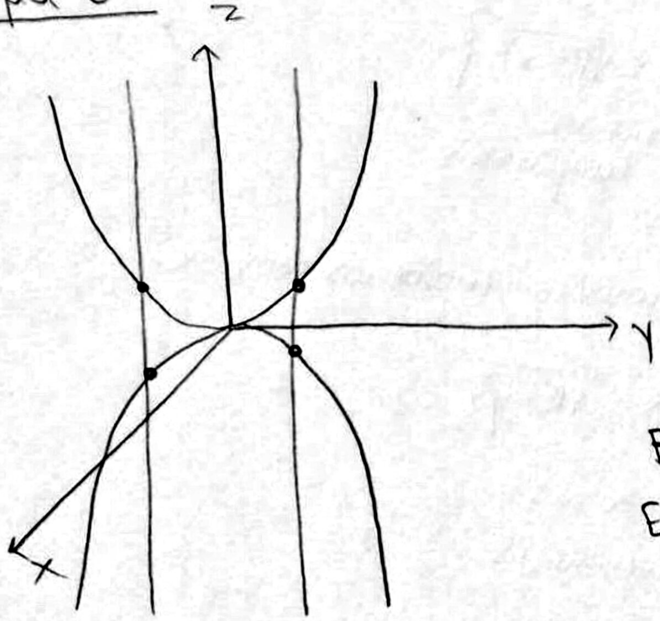
$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-R\sin t, R\cos t)(-R\sin t, R\cos t)\, dt$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2\, dt$

$= \frac{1}{2} R^2\, t \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2$

Θέμα 3ο



α) $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -(x^2+y^2) \le z \le x^2+y^2 \end{array} \right\}$

$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (x,y) \in B(0,1) \\ -(x^2+y^2) \le z \le x^2+y^2 \end{array} \right\}$

$B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ συμπαγές και J-μετρήσιμο

Έστω $\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x,y) = -(x^2+y^2) \\ \varphi_2(x,y) = x^2+y^2 \end{array} \right\}$ ολοκληρώσιμες ως συνεχείς

$\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$. Άρα V κανονικό χωρίο ως προς Oxy

$$\int_V z^2 \, d(x,y,z) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-x^2-y^2}^{x^2+y^2} z^2 \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{z^3}{3}\Big|_{-x^2-y^2}^{x^2+y^2} dy\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^3 + (x^2+y^2)^3 \, dy\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^3 \, dy\, dx$$

Πολικές: $x = \rho\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = \rho\sin\varphi \quad 0 \le \rho \le 1$

$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\,(\rho^2)^3 \, d\varphi\, d\rho = \frac{2}{3}\int_0^1 \rho^7 \cdot 2\pi\, d\rho =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\,\frac{\rho^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{\cancel{4}\pi}{3\cdot \cancel{8}_2} = \frac{\pi}{6}$$

Θέμα 4º

C το γράφημα της $f(x) = \sin x \leadsto \gamma(t) = (t, \sin t), \; t \in [0, \pi/2]$

$\gamma'(t) = (1, \cos t)$

$$I = \int_C y\sqrt{1-y^2}\, ds = \int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\;\sqrt{1+\cos^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{1+\cos^2 t}\; dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 t}\, d\left(-\tfrac{1}{2}\cos^2 t\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos^2 t)^{1/2}\, d(1+\cos^2 t) = -\frac{1}{2}\,\frac{(1+\cos^2 t)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1^{3/2} - 2^{3/2}\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$J = \int_C (1, \sqrt{1-y^2})\, d(x,y) = \int_{\pi/2}^{0} (1, \sqrt{1-\sin^2 t})\,(1, \cos t)\, dt$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} (1, \cos t)(1, \cos t)\, dt = \int_{\pi/2}^{0} 1+\cos^2 t\; dt$$

$$= -\pi/2 + \int_{\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = -\pi/2 - \frac{1}{2}\,\pi/2 - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\pi/2}^{0}$$

$$= -\frac{3\pi}{4}$$

Θέμα 5º

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$$

$$\gamma(t)=r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\cos t\right)\quad t\in[0,2\pi]$$

$$F(x,y,z)=\left(-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},-y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},-z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right)$$

α) Πεδίο κλίσεων

$$Df=\begin{pmatrix}\frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz}\\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz}\\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} & \frac{df_3}{dz}\end{pmatrix}=Df^T$$ Άρα πεδίο κλίσεων.

$$\frac{df_1}{dx}=-3x(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{df_1}{dy}=-3xy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{df_1}{dz}=-3xz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{df_2}{dx}=-3xy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}=\frac{df_1}{dy}$$

$$\frac{df_2}{dy}=-3y(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{df_2}{dz}=-3yz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{df_3}{dx}=-3xz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}=\frac{df_1}{dz}$$

$$\frac{df_3}{dy}=-3yz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}=\frac{df_2}{dz}$$

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Επειδή στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι είναι πεδίο κλίσεων ισχύει

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{f}(x,y,z)\,d(x,y,z) = \phi(\gamma(B)) - \phi(\gamma(a)) = \phi(\gamma(\pi)) - \phi(\gamma(0))$$

$$\nabla\phi = F \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = F_1 \Rightarrow \phi = \int -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,dx + h(y,z)$$

$$\Rightarrow \phi = -1/2 \int (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) + h(y,z)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + h(y,z) = \frac{1}{\|x,y,z\|} + h(y,z)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = F_2 \Rightarrow -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{d h(y,z)}{dy} = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d h(y,z)}{dy} = 0 \Rightarrow h = h(z)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = F_3 \Rightarrow -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{dh}{dz} = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h = c$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{\|x,y,z\|}, \text{ για } c=0$$

$$\phi(\gamma(\pi)) - \phi(\gamma(0)) = \phi((0,0,-r)) - \phi((0,0,r)) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$$

Θέμα 6ο

$\bar{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, 1)$

$S_1 = \{(x, y, 2x^2+2y^2) : (x,y) \in D\}$ $\quad S_2 = \{(x, y, 1+x^2+y^2) : (x,y) \in D\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

α) $S_2 = \{(x, y, 1+x^2+y^2) : (x,y) \in D\}$

$\Phi_2(u,v) = (u, v, 1+u^2+v^2)$

$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -1 \leq u \leq 1 \; , \; -\sqrt{1-u^2} \; v \leq \sqrt{1-u^2}\}$

$$\iint_U \|\Phi_u \times \Phi_v\| d(u,v) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{4u^2+4v^2+1} \, dv \, du$$

$\Phi_u = (1, 0, 2u)$

$\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} e & e & e \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

Πολικές: $u = \rho\cos\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$v = \rho\sin\varphi \quad 0 \leq \rho \leq 1$

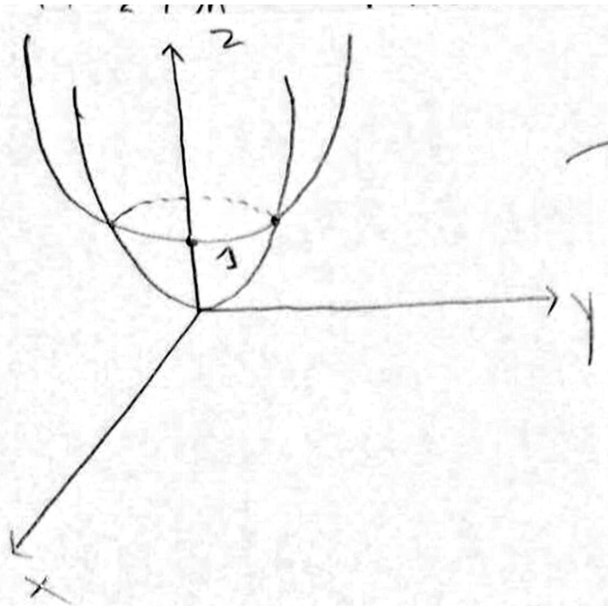
$du\,dv = \rho\,d\rho\,d\varphi$

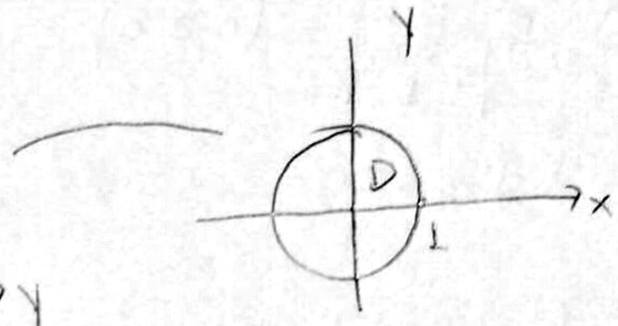
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^2+1} \; \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_0^1 2\pi \sqrt{4\rho^2+1} \cdot \rho \, d\rho =$$

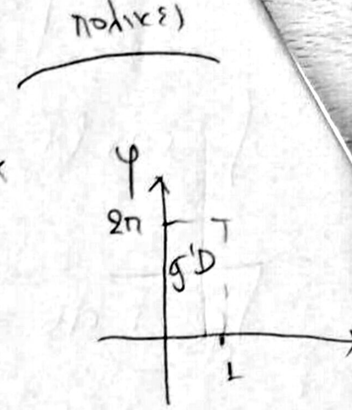
$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{4\rho^2+1} \; d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{4\rho^2+1} \; d(4\rho^2+1)$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (4\rho^2+1)^{1/2} d(4\rho^2+1) = \frac{\pi}{4} \left. \frac{(4\rho^2+1)^{3/2}}{3/2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

β)







• $\operatorname{div} f = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} + \frac{df_3}{dz} = 3x^2 + 3y^2$

$\int_V \operatorname{div} f \, dV = \int_V 3x^2 + 3y^2 \, dV$

$V = \{(x,y) \in D : -1 \le x \le 1 \ , -\sqrt{1-y^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \ , 2x^2+2y^2 \le z \le 1+x^2+y^2\}$

$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{2x^2+2y^2}^{1+x^2+y^2} 3x^2+3y^2 \, dz \, dy \, dx =$

$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (3x^2+3y^2)(1-x^2-y^2) \, dy \, dx$

πολικές $x = \rho\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$
$y = \rho\sin\varphi \quad 0 \le \rho \le 1$
$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$

$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3\rho^2\cos^2\varphi + 3\rho^2\sin^2\varphi)(1-\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)\rho \, d\varphi \, d\rho$

$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3\rho^3 \cdot (1-\rho^2) \, d\varphi \, d\rho = 2\pi \int_0^1 3\rho^3 - 3\rho^5 \, d\rho$

$= \cancel{2}\pi \, 3 \frac{\rho^4}{\cancel{4}_2}\Big|_0^1 - \cancel{2}\pi \, \cancel{3} \frac{\rho^6}{\cancel{6}}\Big|_0^1 =$

$= \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}$

$$\iint_{u=D} F(\Phi_1(u,v)) N_1(u,v)\, d(u,v) + \iint_{u=D} \bar{F}(\Phi_2(u,v)) N_2(u,v)\, d(u,v)$$

$N_2(u,v) = (-2u,-2v,1) \longrightarrow$ δειχνει προς το εξωτερικο του V

$\Phi_1(u,v) = (u,v,2u^2+2v^2)$

$\Phi_{1u} = (1,0,4u)$

$\Phi_{1v} = (0,1,4v)$

$\Phi_{1u} \times \Phi_{1v} = \begin{vmatrix} e & e & e \\ 1 & 0 & 4u \\ 0 & 1 & 4v \end{vmatrix} = (-4u,-4v,1)$ ~> Δειχνει προς το εσωτερικο του V

Οπότε θεωρώ $\tilde{u} = -u$
$\tilde{v} = v$

$\tilde{\Phi}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v},2\tilde{u}^2+2\tilde{v}^2) = (-u,v,2u^2+2v^2)$

$J = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ άρα θετική η αναπαραμετρηση

$\tilde{N}(\tilde{u},\tilde{v}) = (-4u,4v,-1)$ ~> δειχνει προς το εξωτερικο του V

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} (-u^3,v^3,1)(-4u,4v,-1)\,d(u,v) + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} (u^3,v^3,1)(-2u,2v,1)\,d(u,v)$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 4u^4+4v^4-1\,d(u,v) + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} -2u^4-2v^4+1\,d(u,v)$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 2u^4+2v^4\,d(u,v) = \int_0^1\int_0^{2\pi} (2\rho^4\cos^4\varphi + 2\rho^4\sin^4\varphi)\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi\,dr$$

<u>πολικές</u>

$u = \rho\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$v = \rho\sin\varphi \quad 0 \le r \le 1$

$du\,dv = \rho\,d\rho\,d\varphi$

$$= \int_0^1 \cancel{2}\rho^5 \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{2}+\cancel{2}\cos^2 2\varphi}{\cancel{4}}\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \int_0^{2\pi} 1+\cos^2 2\varphi\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \int_0^{2\pi} 1 + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \, d\varphi \, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right] d\varphi \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \, \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 4\varphi \, d\varphi \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \, \frac{6\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_0^{2\pi} \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^5 \, \frac{6\pi}{2} \, d\rho = \frac{6\pi}{2} \, \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} e & e & e \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ x^3 & y^3 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$$\int_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot \vec{u}\, dS_2 = 0$$

$$\int_{dS_2} F\, d\sigma = \int F(\phi(\gamma(t))) \cdot \phi'(\gamma(t))\, dt$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$F(x,y,z) = (x^3, y^3, 1)$$

$$\phi(u,v) = (u, v, 1)$$

$$F(\phi(u,v)) = (u^3, v^3, 1) \quad \text{για} \quad \begin{aligned} u &= u(t) = x(t) = \cos t \\ v &= v(t) = y(t) = \sin t \end{aligned}$$

$$F(\phi(\gamma(t))) = (\cos^3 t, \sin^3 t, 1)$$

$$\phi(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 1)$$

$$\phi'(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3 t, \sin^3 t, 1)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos^3 t \sin t + \cos t \sin^3 t)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t\, dt + \int_0^{2\pi} \cos t \sin^3 t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \sin^3 t\, d(\sin t)$$

$$= \frac{\cos^4 t}{4}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^4 t}{4}\Big|_0^{2\pi} = 0$$